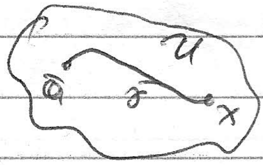
16/05/16 **Θεώρημα:** Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο (ανοικτό & συνεκτικό) και $\bar f : U \to \mathbb{R}^n$ συνεχές.

Τότε $\bar f$ πεδίο κλίσεων ($\Leftrightarrow \exists \varphi : U \to \mathbb{R} : \nabla\varphi = \bar f$) $\Leftrightarrow$ τα επικ. ολ/τα του $\bar f$ είναι ανεξάρτητα του δρόμου ($\Leftrightarrow$ τα επικ. ολ/τα του $\bar f$ κατά μήκος κατά τμ. C^1 καμπυλών είναι $=0$) και τότε $\forall \bar a, \bar x \in U$ και $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ με $\bar\gamma([\alpha,\beta]) \subset U$, $\bar\gamma(\alpha) = \bar a$, $\bar\gamma(\beta) = \bar x$:

$$\int_{\gamma} \bar f(\bar y)\, d\bar y = \varphi(\bar x) - \varphi(\bar a)$$



Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $\varphi : U \to \mathbb{R}$ με $\nabla\varphi = \bar f$, $\bar a, \bar x \in U$ και $\bar\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ όπως πιο πάνω και έστω $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \beta$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ έτσι ώστε $\bar\gamma = \bar\gamma_1 \oplus \dots \oplus \bar\gamma_k$ με $\bar\gamma_i = \bar\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ συνεχώς διαφ. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar y = \sum_{i=1}^{k} \int_{\bar\gamma_i} \nabla\varphi \cdot d\bar y := \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \nabla\varphi(\bar\gamma_i(t)) \cdot \bar\gamma_i'(t)\, dt =$$

$$\overset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\varphi \circ \bar\gamma_i)'(t)\, dt \;\underset{\text{Θεμ. Θεώρημα Απ}}{=}\; \sum_{i=1}^{k} (\varphi \circ \bar\gamma_i)(t) - (\varphi \circ \bar\gamma_i)(t_{i-1}) =$$

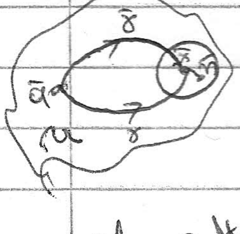
$$= \varphi(\bar\gamma(\beta)) - \varphi(\bar\gamma(\alpha)) = \varphi(\bar x) - \varphi(\bar a)$$

τηλεσκοπική σειρά.

($\Leftarrow$) Έστω τα επικ. ολ/τα είναι ανεξ. του δρόμου. [Θ.ν.δ.ο. $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}$ ώστε $\nabla\varphi = \bar f$] Ορίζουμε $\varphi : U \to \mathbb{R} : \varphi(\bar x) = \int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar y$, $\forall \bar x \in U$, όπου $\bar\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ μια οποιαδ. καμπύλη κατά τμ. C^1 με $\bar\gamma([\alpha,\beta]) \subset U$ με $\bar\gamma(\alpha) = \bar a$ (αυθαίρετο στο U) και $\bar\gamma(\beta) = \bar x$. (η φ είναι καλά ορισμένη, αφού $\varphi(\bar x) \in \mathbb{R}$, $\forall \bar x \in U$ και είναι μοναδικό $\forall \bar x \in U$, για σταθ. $\bar a$) αφού τα επικ. ολ/τα της $\bar f$ είναι ανεξάρτητα του δρόμου. Άρα αρκεί ν.δ.ο. $\lim_{\eta \to 0} \frac{\varphi(\bar x + \bar\eta) - \varphi(\bar x) - \bar f(\bar x)}{\|\bar\eta\|} = 0$. Έστω $\bar x \in U \xRightarrow{U \text{ ανοικτό}}$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0) : B(\bar x, \varepsilon) \subset U \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall$ ευθ. τμήμα $\bar\gamma_\eta(t) := (\bar x + t\bar\eta) \in B(\bar x, \varepsilon) \subset U$, $t \in [0,1]$ $\wedge$ $\bar\eta \in B(\bar 0, \varepsilon)$ ($\Leftrightarrow \|\bar\eta\| < \varepsilon$) ισχύει:



$$\varphi(\bar x + \bar\eta) = \int_{\bar\gamma \oplus \bar\gamma_\eta} \bar f \cdot d\bar y = \underbrace{\int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar y}_{\varphi(\bar x)} + \underbrace{\int_{\bar\gamma_\eta} \bar f \cdot d\bar y}_{\bar f(\bar x)\cdot\bar\eta + \int_{\bar\gamma_\eta} (\bar f(\bar y) - \bar f(\bar x)) \cdot d\bar y}$$

$$\int_0^1 \bar f(\bar x) \cdot \bar\eta\, dt = \int_{\bar\gamma_\eta} \bar f(\bar x) \cdot d\bar y$$

$$\Rightarrow \left|\varphi(\bar{x}+\bar{\eta})-\varphi(\bar{x})-\bar{f}(\bar{x})\cdot\bar{\eta}\right| = \left|\int_{\bar\sigma_3}(\bar f(\bar y)-\bar f(\bar x))\cdot d\bar y\right| = \left|\int_0^1 (\bar f(\bar x+t\bar\eta)-\bar f(\bar x))\bar\eta\, dt\right|$$

$$\le \int_0^1 \underbrace{\left|\bar f(\bar x+t\bar\eta)-\bar f(\bar x)\cdot\bar\eta\right|}_{\|\bar f(\bar x+\bar\eta t)-\bar f(\bar x)\|\,\|\bar\eta\|} dt$$. Αρκεί νδο $I=\int_0^1\|\bar f(\bar x+t\bar\eta)-\bar f(\bar x)\|dt \xrightarrow[\bar\eta\to\bar 0]{} 0$

$I \le \max\limits_{t\in[0,1]}\|\bar f(\bar x+t\bar\eta)-\bar f(\bar x)\| \xrightarrow[\bar\eta\to\bar 0]{} 0$ αφού f: συνεχής.

Παρατήρηση (Εφαρμογή): Αν $f:U\to\mathbb{R}^n$, U: συνεκτικό κ' ανοικτό είναι πεδίο κλίσεων και ξέρω $\varphi:U\to\mathbb{R}$ (δυναμικό) με $\nabla\varphi=\bar f \Rightarrow$ μπορώ να υπολ. κάθε επικ. ολ/μα κατά μήκος μιας C^1 κατά τμ. καμπύλης στο U από το $\bar\gamma(\alpha)=\bar x_1$, $\bar\gamma(b)=\bar x_2$ μέσω του τύπου:

$$\int_{\bar\gamma}\bar f\cdot d\bar x = \varphi(\bar x_2)-\varphi(\bar x_1)$$

Αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα συνεχώς διαφορίσιμο δ/κό πεδίο, πεδίο κλίσεων: πρέπει ο Εσσιανός του δ/κού πεδίου να είναι συμμετρικός.

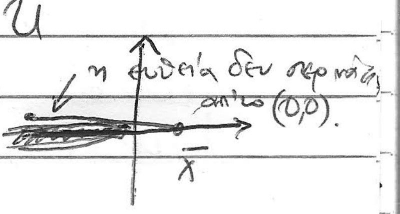
Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό συνεκτικό $\bar f:U\to\mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφ. $\xrightarrow[\text{πεδ. κ.}]{}$

$$\bar f=\nabla\varphi \Rightarrow D\bar f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \\ \vdots & & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi \end{pmatrix}$$ ο οποίος Εσσιανός του φ

είναι συμμετρικός αφού $\varphi: C^2(U)$ (Θεωρ. Schwarz).

Ικανή συνθήκη ώστε το $\bar f\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ πεδίο κλίσεων θα πρέπει $D\bar f(\bar x)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός, $\forall \bar x\in U$ και $U\subset\mathbb{R}^n$ (ανοικτό συνεκτικό) να είναι αστερόμορφο δηλ. να $\exists\, \bar x_0\in U: \forall\bar x\in U\ \{\bar x_0+t(\bar x-\bar x_0): t\in[0,1]\}\subset U$

Παράδειγμα/Άσκηση: Το $\mathbb{R}^2\setminus(-\infty,0]\times\{0\}$



(*) Κάθε αστερόμορφο είναι συνεκτικό // (*) $U\subseteq\mathbb{R}^n$ κυρτό $\Leftrightarrow \forall\,\bar x_1,\bar x_2\in U$ $\{\bar x_1+t(\bar x_2-\bar x_1): t\in[0,1]\}\subset U$

(*) U: κυρτό $\Rightarrow$ U: αστερόμορφο $\Rightarrow$ U: συνεκτικό

Η προηγ. πρόταση είναι ικανή συνθήκη αλλά δεν είναι απαραίτητο το πεδίο κλ. να ορίζεται σε αστερόμορφο.

Π.χ. όλα τα $\bar f : \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{\bar 0\}}_{\text{δεν είναι αστερόμορφο}}$, $\bar f(\bar x) = \dfrac{\bar x}{\|\bar x\|^k}$, $k \in \mathbb{N}$ δεν είναι πεδία κλίσεων (Άσκ)

Ερ. ② : Αν $\bar f : U \to \mathbb{R}^n$ πως μπορώ να βρω ένα δυναμικό του, δηλ. ένα $\varphi : U \to \mathbb{R}$ ώστε $\nabla \varphi = \bar f$.

Απ. ① : Όπως στην αποδ. του Θεωρήματος. $\varphi(\bar x) = \int_\gamma \bar f \cdot d\bar\gamma$

Απ. ② : Με υπολ. ολοκλ. (αορίστων): Π.χ.

$$\bar f(\bar x) = \bar f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}$$. Θέλω να βρω $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

με $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = y \ (1)$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x - y \ (2)$.

$$(1) \Rightarrow \varphi(x,y) = x \cdot y + c(y) \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = x + c'(y) \Rightarrow \boxed{c'(y) = -y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(y) = -\frac{1}{2} y^2 + c, \ c \in \mathbb{R}$$

άρα $\varphi(x,y) = xy - \frac{1}{2} y^2 \ (+c)$.